

## Jackson-Müntz Sätze in der $L_p$ -Norm

MANFRED V. GOLITSCHKE

*Institut für Angewandte Mathematik, Universität Würzburg, Germany*

*Communicated by P. L. Butzer*

Received September 17, 1970

Diese Arbeit ist eine Weiterführung der Artikel [2-4], in denen der Versuch unternommen wird, die Sätze von Jackson [5] und Müntz [7] in  $C[0, 1]$  zu kombinieren. In der vorliegenden Arbeit können nun wesentliche Voraussetzungen über die Exponentenfolge  $\{p_i\}$ , die in [4] noch nötig waren, fallengelassen werden. In zahlreichen Beispielen werden die interessanten Fälle diskutiert, unter anderem auch der Fall konvergenter Exponentenfolge

$$\lim p_i = p^* < \infty \quad \text{für} \quad i \rightarrow \infty.$$

Neu hinzugekommen ist auch eine ausführliche Diskussion dieser Jackson-Müntz Sätze in der  $L_p$ -Norm für  $1 \leq p < \infty$ .

In diesem Zusammenhang ist die Arbeit von Newman [8] zu erwähnen, der in der  $L_2$ -Norm für ganzzahlige Exponenten  $p_i$ ,  $0 = p_0$ ,  $p_{i+1} - p_i > 1$ , optimale Ergebnisse erzielt. Interessant ist auch eine neuere Arbeit von Newman, Passow und Raymon [9], in der ebenfalls Linearkombinationen

$$\sum_{i=0}^n a_i x^{p_i}, \quad p_0 = 0, \quad p_i \text{ reell und positiv,}$$

zur Approximation herangezogen werden. Doch werden hier als Definitions- und Approximationsbereich nicht Intervalle, sondern reelle Teilmengen  $S = \{0, x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  betrachtet, wobei die Folge  $\{x_m\}$  der Bedingung  $\lim x_m = 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und weiteren starken Voraussetzungen genügen muß.

Die Beweismethoden der beiden zuletzt genannten Arbeiten sind von Grund auf verschieden von denen der vorliegenden und auch der früheren Arbeiten [2-4].

### I

Für  $f \in C[a, b]$  ( $p = \infty$ ), bzw. für  $f \in L_p(a, b)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , definieren wir

$$\|f\|_{\infty; a, b} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad \|f\|_{p; a, b} = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Im folgenden sei stets  $p = \infty$  oder  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , fest vorgegeben; ebenso eine Exponentenfolge  $\{p_i\}$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ , mit  $p_i > -1/p$  für  $i = 1, 2, \dots$  und  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ . Für  $p = \infty$  sei  $p_0 = 0$  ein zusätzliches Element der Folge  $\{p_i\}$ . Für  $f \in C[0, 1]$  ( $p = \infty$ ), bzw. für  $f \in L_p(0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , definieren wir die beste Approximation in  $[0, 1]$  in der  $L_p$ -Norm bezüglich  $\{p_i\}$  durch

$$E_s^{(p)}(f; p_i) = \inf_{a_i} \left\| f(x) - \sum_{i \leq s} a_i x^{p_i} \right\|_{p; 0, 1}. \quad (1)$$

Für  $f(x) = x^q$  schreiben wir kürzer

$$A_{qs}^{(p)} = E_s^{(p)}(x^q; p_i), \quad q > -1/p, \quad s \in N. \quad (2)$$

Das Ziel dieser Arbeit ist es, zu vorgegebener Funktion  $f$  und vorgegebener Exponentenfolge  $\{p_i\}$  Abschätzungen für die beste Approximation  $E_s^{(p)}(f; p_i)$  anzugeben. Die hier verwendete Methode ist sehr einfach, liefert aber gute Ergebnisse. Sie beruht im wesentlichen auf folgendem Satz.

**SATZ 1.** *Sei  $f \in C[0, 1]$  für  $p = \infty$ , bzw.  $f \in L_p(0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Sei  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{in} x^i$  ein Polynom. Dann ist für jedes  $s \in N$*

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \|f - P_n\|_{p; 0, 1} + \sum_{q=0}^n |a_{qn}| A_{qs}^{(p)}. \quad (3)$$

Sei  $k \in N_0$  eine nichtnegative ganze Zahl. An der Stelle  $x = 0$  möge  $f$  alle rechtsseitigen Ableitungen  $f^{(q)}(+0)$  bis zur  $k$ -ten Ordnung besitzen. Definieren wir

$$\bar{a}_{qn} = \begin{cases} |a_{qn} - f^{(q)}(+0)/q!| & \text{für } q = 0, \dots, k \\ |a_{qn}| & \text{für } q = k+1, \dots, n, \end{cases} \quad (4)$$

dann gilt für jedes  $s \in N$

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \|f - P_n\|_{p; 0, 1} + \sum_{q=0}^n \bar{a}_{qn} A_{qs}^{(p)} + \sum_{q=0}^k A_{qs}^{(p)} |f^{(q)}(+0)|/q!. \quad (5)$$

*Beweis.* Für  $q = 0, 1, \dots, n$  sei

$$Q_{sq}(x) = \sum_{i \leq s} c_{isq} x^{p_i}, \quad (6)$$

das Polynom bester Approximation der Funktion  $x^q$  in  $[0, 1]$ , d.h.

$$A_{qs}^{(p)} = \|x^q - Q_{sq}(x)\|_{p; 0, 1}.$$

Dann hat auch  $\bar{P}_s(x) = \sum_{i=0}^n a_{in} Q_{si}(x)$  die Gestalt (6). Einfache Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt, daß bereits  $\|f - \bar{P}_s\|_{p; 0, 1}$  den Ungleichungen (3) bzw. (5) genügt; und daher auch  $E_s^{(p)}(f; p_i)$ .

In Satz 1 ist es wesentlich, daß  $s$  und  $n$  von einander unabhängig sind. Um aus (3) oder (5) gute Abschätzungen für  $E_s^{(p)}(f; p_i)$  zu gewinnen, benötigen wir scharfe Abschätzungen für  $A_{qs}^{(p)}$  (Lemma 1) und geeignete Polynome  $P_n$  (Lemmata 2 und 5), die die Funktion  $f$  genügend gut approximieren und möglichst kleine Koeffizienten  $|a_{qn}|$  bzw.  $\bar{a}_{qn}$  besitzen. Zu vorgegebenem  $s \in N$  ist dann  $n = n(s) \in N$  so zu wählen, daß die rechten Seiten von (3) bzw. (5) möglichst klein werden. Diese Methode ist sehr einfach. Trotzdem erhalten wir in vielen Fällen nahezu optimale Ergebnisse. Im Vergleich zu [2-4] ist diese Beweismethode etwas abgeändert worden.

LEMMA 1. Für  $q > -1/p$ ,  $q \in R$ , ist

$$A_{qs}^{(2)} = (2q + 1)^{-1/2} \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i + 1}, \tag{7}$$

$$A_{qs}^{(\infty)} \leq \prod_{i=0}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i}, \tag{8}$$

$$A_{qs}^{(p)} \leq 2^{1/p} (p\epsilon)^{-1/p} \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p} \tag{9}$$

für genügend kleines  $\epsilon > 0$  und alle  $p \in R$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $p \neq 2$ .

*Beweis.* Für  $p = 2$  vergleiche man [1, Kapitel I, Sektion 14]; der Fall  $p = \infty$  wird in [4, Lemma 2] bewiesen.

Sei  $1 \leq p < \infty$ . Für genügend kleines  $\epsilon > 0$  und beliebige  $a_i \in R$  ist

$$\begin{aligned} & \left\| x^q - \sum_{i=1}^s a_i x^{p_i} \right\|_{p; 0,1} \\ & \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \left| x^{q+1/p-\epsilon/2} - \sum_{i=1}^s a_i x^{p_i+1/p-\epsilon/2} \right| \cdot \left\{ \int_0^1 x^{-1+p\epsilon/2} dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl der  $a_i$  erhalten wir hieraus die Ungleichung (9), wenn wir das Lemma 2 des Artikels [4] berücksichtigen.

## II

Als erstes behandeln wir nun den Fall der Supremumsnorm ( $p = \infty$ ). Um geeignete Polynome  $P_n$  für die Abschätzung (5) des Satzes 1 zu bekommen, betrachten wir den Satz 4 des Artikels [4], hier formuliert für  $\lambda = 1$ .

LEMMA 2 [4, Satz 4]. *Es sei  $f$  in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Zu jedem  $n > 2k$  existiert dann ein Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{in} x^i,$$

so daß für alle  $x \in [0, 1]$  gilt

$$|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq C_{kr} n^{r-k} \omega(f^{(k)}; 1/n), \quad r = 0, \dots, k;$$

$$|a_{qn}| \leq D_k n^{q-k} \omega(f^{(k)}; 1/n)/q!, \quad \text{für } q = k+1, \dots, n.$$

Die Konstanten  $C_{kr}$  und  $D_k$  sind unabhängig von  $f$  und  $n$ ;  $\omega(f^{(k)}; \cdot)$  ist der Stetigkeitsmodul der  $k$ -ten Ableitung  $f^{(k)}$ .

Die Polynome  $P_n$  des Lemma 2 haben somit die beiden Eigenschaften:

$$\|f - P_n\|_{\infty; 0,1} \leq C_{k0} n^{-k} \omega(f^{(k)}; 1/n), \quad (10)$$

$$\bar{a}_{qn} \leq C_k n^{q-k} \omega(f^{(k)}; 1/n)/q!, \quad (11)$$

wobei  $\bar{a}_{qn}$  gemäß (4) definiert ist;  $C_k = \max\{D_k, C_{k0}, \dots, C_{kk}\}$ .

Wir betrachten nun monoton wachsende Folgen  $\{p_i\}$  mit  $p_0 = 0$  und  $\lim p_i = \infty$  für  $i \rightarrow \infty$ . Die Sätze von Ch. Müntz legen es uns nahe, zur Beschreibung der Größenordnung der besten Approximation  $E_s^{(\infty)}(f; p_i)$  folgende Funktion einzuführen:

$$\varphi(s) = \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/p_i\right). \quad (12)$$

Ihre große Bedeutung wird in den folgenden Beispielen klar. Für die Folge  $p_i = i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , ist

$$e^{-1}\varphi(s) \leq s \leq \varphi(s).$$

Aus Lemma 1 (8) folgt nun sofort

LEMMA 3. *Für  $q \in R$ ,  $q > 0$ , sei  $r \in N_0$  bestimmt durch*

$$p_r \leq q < p_{r+1}.$$

Dann gilt für die beste Approximation der Funktion  $x^q$ :

$$A_{qs}^{(\infty)} \leq \{\varphi(r)\}^{2q} \{\varphi(s)\}^{-2q}. \quad (13)$$

*Beweis.* Für  $q \geq p_s$  ist (13) trivial. Für  $q < p_s$  ist nach (8)

$$A_{q_s}^{(\infty)} \leq \prod_{i=r+1}^s \frac{p_i - q}{p_i + q} \leq \prod_{i=r+1}^s \exp(-2q/p_i),$$

woraus unmittelbar (13) folgt.

Es ist nicht möglich, eine gemeinsame Abschätzformel der besten Approximation  $E_s^{(\infty)}(f; p_i)$  für alle Folgen  $\{p_i\}$  anzugeben. Insbesondere müssen die Fälle  $\lim p_i = \infty$  und  $\lim p_i = p^* < \infty$  für  $i \rightarrow \infty$  getrennt behandelt werden. Die zusätzlichen Voraussetzungen für die Folge  $\{p_i\}$  sind so schwach, daß in den folgenden Beispielen die interessantesten Fälle sicher enthalten sind.

1. BEISPIEL. In dem Artikel [4] machte ich für die Exponentenfolge  $\{p_i\}$  die folgende Voraussetzung. Es sei  $0 = p_0 < p_1 < \dots$ , und es mögen Konstante  $0 < A < \infty$ ,  $0 < B < \infty$  und  $0 < \delta \leq \tilde{\delta} < \infty$  existieren, so daß für alle  $s = 1, 2, \dots$  gilt

$$A(p_s)^\delta \leq \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/p_i\right) = \varphi(s) \leq B(p_s)^\delta.$$

Dann gilt

SATZ 2. Sei  $f$  in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Dann existiert eine positive Zahl  $K_k$ , nur abhängig von  $k$  und der Folge  $\{p_i\}$ , so daß für jedes  $s$  mit  $p_s \geq 2k + 1$

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq K_k (p_s^{-2\delta})^k \omega(f^{(k)}; p_s^{-2\delta}) + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k c_q |f^{(q)}(0)|(p_s^{-2\delta})^q, \quad (14)$$

falls  $\tilde{\delta} \leq \frac{1}{2}$ , und

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq K_k (p_s^{-\delta/\tilde{\delta}})^k \omega(f^{(k)}; p_s^{-\delta/\tilde{\delta}}) + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k c_q |f^{(q)}(0)|(p_s^{-2\delta})^q, \quad (15)$$

falls  $\tilde{\delta} > \frac{1}{2}$ , erfüllt ist. Für  $k = 0$  entfällt in (14) und (15) der zweite Summand; die Größen  $c_q$  sind definiert durch

$$c_q = (B/A)^{2q} q^{2q\tilde{\delta}/q!}, \quad q = 1, \dots, k, \quad q \notin \{p_i\}.$$

Den Beweis und die zahlreichen Anwendungen hiervon bringe ich hier nicht, sondern verweise auf die obenerwähnte Arbeit [4].

2. BEISPIEL. Voraussetzung für die Folge  $\{p_i\}$ : Es sei  $0 = p_0 < p_1 < \dots$ . Es möge ein  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \in \mathcal{R}$ , existieren, so daß für  $i \geq i_0$  stets

$$p_i \geq i\lambda \quad (16)$$

erfüllt ist. (Der Einfachheit halber betrachte ich hier nur den Fall  $i_0 = 1$ ).

Für  $q \in \mathcal{R}$ ,  $q > 0$ , sei  $r \in N_0$  bestimmt durch  $p_r \leq q < p_{r+1}$ . Dann ist

$$\varphi(r) \leq K_\lambda q^{1/\lambda}, \quad K_\lambda = (e/\lambda)^{1/\lambda}; \quad (17)$$

und nach Lemma 3 ist

$$A_{qs}^{(\infty)} \leq K_\lambda^{2q} q^{2q/\lambda} \{\varphi(s)\}^{-2q}. \quad (18)$$

Wir erhalten nun dem Satz 2 entsprechend

SATZ 3. Es sei  $f$  in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Die Folge  $\{p_i\}$  erfülle (16). Dann existiert eine positive Zahl  $K$ , nur abhängig von  $k$  und der Folge  $\{p_i\}$ , und eine natürliche Zahl  $s_0$ , so daß für alle  $s \geq s_0$  gilt: Für  $\lambda \geq 2$

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq K\varphi(s)^{-2k} \omega(f^{(k)}; \varphi(s)^{-2}) + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k d_q |f^{(q)}(0)| \varphi(s)^{-2q}; \quad (19)$$

für  $0 < \lambda < 2$

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq K\varphi(s)^{-\lambda k} \omega(f^{(k)}; \varphi(s)^{-\lambda}) + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k d_q |f^{(q)}(0)| \varphi(s)^{-2q}. \quad (20)$$

Für  $k = 0$  entfällt in (19) und (20) der zweite Summand. Die Größen  $d_q$  sind definiert durch

$$d_q = K_\lambda^{2q} q^{2q/\lambda} / q!, \quad q = 1, \dots, k, \quad q \notin \{p_i\}.$$

*Beweis.* Der Einfachheit halber sei  $i_0 = 1$ . Wir wenden Satz 1 (5) an. Als Polynome  $P_n$  wählen wir hierbei die des Lemma 2. Unter Verwendung von (10), (11) und (18) erhalten wir dann aus (5)

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq C_k n^{-k} \omega(f^{(k)}; 1/n) \left\{ 1 + \sum_{q=1}^n e^q K_\lambda^{2q} q^{-q+2q/\lambda} n^q \varphi(s)^{-2q} \right\} + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k d_q |f^{(q)}(0)| \varphi(s)^{-2q}. \quad (21)$$

Es sei  $\lambda \geq 2$ . Zu vorgegebenem  $s \in N$ ,  $s \geq s_0$ , bestimmen wir  $n \in N$  durch

$$n = n(s) = [\varphi(s)^2 / (2eK_\lambda^2)]. \quad (22)$$

Hierbei sei  $[z]$  die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $z$ .  $s_0$  bestimmt sich aus Lemma 2 durch  $n(s_0) \geq 2k + 1$ . Wir setzen nun (22) in (21) ein und erhalten sofort (19). Ist aber  $0 < \lambda < 2$ , so wählen wir

$$n = n(s) = [\varphi(s)^\lambda (2eK_\lambda^2)^{-\lambda/2}]. \tag{23}$$

Aus (21) folgt dann unmittelbar (20), womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

In den Arbeiten [3] und [4] habe ich einige wesentliche Beispiele für den Satz 2 angegeben. Interessant sind aber auch Fälle, wo die Folge  $\{p_i\}$  die Voraussetzung des Satzes 2 nicht erfüllt. Betrachten wir etwa folgenden Fall.

2.1. BEISPIEL. Sei  $p_i = (i + 1) \log(i + 1)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Für  $i \geq i_0 = 5$  ist dann  $p_i \geq 2i$  und damit  $\lambda \geq 2$ . Außerdem ist

$$\varphi(s) = \exp \left( \sum_{i=1}^s 1/(i + 1) \log(i + 1) \right) \geq \log s.$$

Nach Satz 3 ist dann für  $f \in C^k[0, 1]$

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq K(\log s)^{-2k} \omega(f^{(k)}; (\log s)^{-2}) + \sum_{q=1, q \neq \{p_i\}}^k d_q |f^{(q)}(0)| (\log s)^{-2q}. \tag{24}$$

3. BEISPIEL. Die Exponentenfolge  $\{p_i\}$  soll nun wesentlich langsamer anwachsen. Als Paradebeispiel betrachten wir hier den Fall

$$p_i = i^\beta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \beta < 1. \tag{25}$$

Es ist für  $q > s^\beta$

$$\prod_{i=1}^s \frac{q - i^\beta}{q + i^\beta} \leq \exp \left( -\frac{2}{q} \sum_{i=1}^s i^\beta \right) \leq \exp \left( -\frac{2}{(1 + \beta)q} s^{1+\beta} \right). \tag{26}$$

Es ist für  $2 \leq q < s^\beta$

$$\prod_{i=1}^s \frac{|q - i^\beta|}{q + i^\beta} \leq \exp \left( -2q \sum_{q^{1/\beta} < i \leq s} i^{-\beta} \right) \exp \left( -\frac{2}{q} \sum_{1 \leq i < q^{1/\beta}} i^\beta \right) \leq e^4 \exp \left( -\frac{2}{1 - \beta} [qs^{1-\beta} - q^{1/\beta}] \right) \exp \left( -\frac{2}{1 + \beta} q^{1/\beta} \right). \tag{27}$$

Unter Beachtung von (8) wenden wir nun für die Polynome  $P_n$  des Lemma 2 den Satz 1 an und bekommen mit Hilfe von (10), (11), (26) und (27)

$$E_s^{(\infty)}(f; i^\beta) \leq C_k n^{-k} \omega(f^{(k)}; 1/n) \{1 + \Sigma_n\} + \Sigma'_k, \tag{28}$$

wobei

$$\Sigma'_k = \sum_{q=1, q \notin \{i^\beta\}}^k c_q |f^{(q)}(+0)| \exp\left(-\frac{2}{1-\beta} q s^{1-\beta}\right),$$

$c_q$  positiv und unabhängig von  $s$  und  $n$ ;  $\Sigma'_k = 0$  für  $k = 0, k = 1$ . Außerdem ist

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \sum_{q=1}^n \frac{n^q}{q!} A_{qs}^{(\infty)} \leq \sum_{s^\beta < q \leq n} \frac{n^q}{q!} \exp\left(-\frac{2}{(1+\beta)q} s^{1+\beta}\right) \\ &+ \sum_{2 \leq q < s^\beta} \frac{n^q}{q!} e^q \exp\left(-\frac{2}{1-\beta} [qs^{1-\beta} - q^{1/\beta}]\right) \exp\left(-\frac{2}{1+\beta} q^{1/\beta}\right). \end{aligned}$$

Zu jedem  $s \in N$ ,  $s \geq s_0$ , wählen wir nun  $n = n(s) = [s^{(1+\beta)/2}]$ .  $s_0 \in N$  ist bestimmt durch  $n(s_0) \geq 2k + 1$ .

Setzen wir dieses  $n = n(s)$  in die letzte Ungleichung ein, so sind die beiden letzten Summen gleichmäßig beschränkt bezüglich  $s$  und  $n(s)$ . Daher ist auch  $\Sigma_n$  gleichmäßig beschränkt. Hieraus ergibt sich

**SATZ 4.** *Es sei  $f \in C^k[0, 1]$ ,  $k \geq 0$ . Es sei  $p_i = i^\beta$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  und  $0 < \beta < 1$ . Dann existiert eine positive Zahl  $K$ , nur abhängig von  $k$  und  $\beta$ , so daß für alle  $s \geq s_0$  gilt*

$$E_s^{(\infty)}(f; i^\beta) \leq K s^{-(1+\beta)k/2} \omega(f^{(k)}; s^{-(1+\beta)/2}) + \Sigma'_k. \quad (29)$$

**4. BEISPIEL.** In den bisherigen Beispielen streben die Folgenglieder  $p_i$  mit wachsendem  $i$  monoton gegen Unendlich. Es ist vollkommen unbekannt, wie sich die beste Approximation  $E_s^{(\infty)}(f; p_i)$  für große  $s$  verhält, wenn die Exponenten  $p_i$  beschränkt sind. Es sei nun

$$0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots,$$

sowie

$$\lim p_i = p^* < \infty \quad \text{für } i \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Es existiert eine reelle Zahl  $c$ ,  $0 < c < 1$ , unabhängig von  $q$  und  $i$ , so daß für alle  $i \in N$  und  $q \in N$ ,  $q \notin \{p_i\}$  gilt

$$|q - p_i| / (q + p_i) \leq (q - c) / (q + c) \leq e^{-2c/q}. \quad (31)$$

Zum Beispiel ist (31) für  $c = \min\{p_1, 1/p^*\}$  erfüllt. Hieraus folgt nach Lemma 1 (8) für die beste Approximation

$$A_{qs}^{(\infty)} \leq e^{-2cs/q}, \quad q \in N, \quad q \notin \{p_i\}, \quad s \in N. \quad (32)$$



Unter Verwendung von (10) und (11) des Lemma 2 ergibt Satz 1 (5)

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq C_k n^{-k} \omega(f^{(k)}; 1/n) \left\{ 1 + \sum_{q=1}^n n^q e^{-2cs/q} / q! \right\} + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k |f^{(q)}(0)| e^{-2sc/q} / q!. \quad (33)$$

Damit die Summe in der geschweiften Klammer von (33) für alle  $s$  gleichmäßig beschränkt ist, wählen wir zu vorgegebenem  $s$  ein

$$n = n(s) = [(cs)^{1/2}].$$

Aus (33) erhalten wir dann den folgenden

**SATZ 5.** *Es sei  $f \in C^k[0, 1]$ ,  $k \geq 0$ . Für die monoton wachsende Folge  $\{p_i\}$  gelte  $p_0 = 0$  und  $\lim p_i = p^* < \infty$  für  $i \rightarrow \infty$ . Dann existiert eine positive Zahl  $K$ , nur abhängig von  $k$  und  $\{p_i\}$ , so daß für alle  $s \geq s_0$  ( $s_0 \in N$  bestimmt durch  $n(s_0) > 2k$ ) gilt*

$$E_s^{(\infty)}(f; p_i) \leq K s^{-k/2} \omega(f^{(k)}; s^{-1/2}) + \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k |f^{(q)}(0)| e^{-2sc/q} / q!. \quad (34)$$

*Bemerkung.* In den Arbeiten [3] und [4] konnte ich an einigen Beispielen zeigen, daß die Abschätzungen (14), (15), (19) und (20) der Sätze 2 und 3 in dieser Allgemeinheit nicht verbessert werden können. Für die Sätze 4 und 5 fehlen diese speziellen Beispiele. Daher ist die Frage noch völlig offen, ob (29) und (34) das asymptotische Verhalten der besten Approximation optimal wiedergeben, oder ob noch wesentlich günstigere Ergebnisse erzielt werden können.

**5. BEISPIEL.** Das Ergebnis von Ch. Müntz ist auch dann noch richtig, wenn  $p_0 = 0, p_i > 0$  für alle  $i \in N, p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ , sowie

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty \quad (35)$$

erfüllt ist. Auch für diesen amüsanten Fall ist unser Beweisprinzip des Satzes 1 anwendbar. Wir führen die Funktion

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^s p_i, \quad s \in N, \quad (36)$$

ein. Der Einfachheit halber sei zusätzlich  $p_i < 1$ ,  $i \in N$ . Nach Lemma 1 (8) ist dann für jedes  $q \in N$

$$A_{qs}^{(\infty)} \leq \prod_{i=1}^s \frac{q - p_i}{q + p_i} \leq \prod_{i=1}^s \exp(-2p_i/q) = \exp(-2\Phi(s)/q). \quad (37)$$

Nach Satz 1 (5) und (10), (11) und (37) folgt dann

$$\begin{aligned} E_s^{(\infty)}(f; p_i) &\leq C_k n^{-k} \omega(f^{(k)}; 1/n) \left\{ 1 + \sum_{q=1}^n \frac{n^q}{q!} \exp(-2\Phi(s)/q) \right\} \\ &\quad + \sum_{q=1, q \neq \{p_i\}}^k |f^{(q)}(0)| \exp(-2\Phi(s)/q)/q!. \end{aligned}$$

Für vorgegebenes  $s \geq s_0$  bestimmen wir  $n = n(s) = [(\Phi(s))^{1/2}]$  und erhalten den

**SATZ 6.** *Es sei  $f \in C^k[0, 1]$ . Unter obigen Voraussetzungen existiert eine positive Konstante  $K$ , nur abhängig von  $k$  und  $\{p_i\}$ , so daß für alle  $s \geq s_0$  ( $s_0 \in N$  bestimmt durch  $n(s_0) > 2k$ ) gilt*

$$\begin{aligned} E_s^{(\infty)}(f; p_i) &\leq K(\Phi(s))^{-k/2} \omega(f^{(k)}; \Phi(s)^{-1/2}) \\ &\quad + \sum_{q=1}^k |f^{(q)}(0)| \exp(-2\Phi(s)/q)/q!. \end{aligned} \quad (38)$$

5.1. BEISPIEL. Ist etwa  $p_0 = 0$  und  $p_i = 1/i$ ,  $i \in N$ , so ist

$$\log s \leq \Phi(s) = \sum_{i=1}^s 1/i \leq 1 + \log s$$

und daher nach Satz 6

$$\begin{aligned} E_s^{(\infty)}(f; 1/i) &\leq K(\log s)^{-k/2} \omega(f^{(k)}; (\log s)^{-1/2}) \\ &\quad + \sum_{q=2}^k |f^{(q)}(0)| s^{-2/q}/q!. \end{aligned} \quad (39)$$

### III

Nach dieser ausführlichen Diskussion der Jackson-Müntz Sätze in der Supremumsnorm werden wir nun analoge Ergebnisse für die  $L_p$ -Norm,  $1 \leq p < \infty$ , herleiten. Für  $p = 2$  und ganzzahlige Exponenten  $p_i$  vergleiche man die Arbeit von Newman [8].

Um Satz 1 erfolgreich anwenden zu können, müssen wir mehr über die Koeffizienten  $|a_{qn}|$  und  $\bar{a}_{qn}$  der Approximationspolynome  $P_n$  wissen. Hier helfen uns die beiden folgenden Lemmata.

LEMMA 4. *Es sei  $F \in C[-1, 1]$ . Sei  $k \in N_0$  und  $0 < \alpha \leq 1$ . Für alle  $n \geq n_0$  möge ein Polynom  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{in}x^i$  existieren, so daß für alle  $x \in [-1, 1]$*

$$|F(x) - P_n(x)| \leq Mn^{-k-\alpha} \tag{40}$$

erfüllt ist ( $M$  sei positive Konstante). Dann ist

$$|a_{qn} - F^{(q)}(0)/q!| \leq M_q n^{q-k-\alpha}/q!, \quad q = 0, \dots, k; \tag{41}$$

$$|a_{k+1,n}| \leq M_{k+1} \log n / (k+1)! \quad \text{für } \alpha = 1; \tag{42}$$

$$|a_{k+1,n}| \leq M'_{k+1} n^{1-\alpha} / (k+1)! \quad \text{für } 0 < \alpha < 1; \tag{43}$$

$$|a_{qn}| \leq M' n^{q-k-\alpha} / q! \quad \text{für } q = k+2, \dots, n. \tag{44}$$

Die positiven Größen  $M_0, \dots, M_{k+1}, M'_{k+1}, M'$  sind unabhängig von  $n$ ,  $M'$  ist unabhängig von  $q$ .

*Beweis.* Nach Bernstein ist  $F$  in  $(-1, 1)$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Es sei  $m_j = n2^j$ . Dann ist in  $[-1, 1]$

$$F(x) - P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (P_{m_{j+1}}(x) - P_{m_j}(x)) \tag{45}$$

und für  $q = 1, \dots, k$  in jedem Intervall  $[a, b] \subset (-1, 1)$

$$F^{(q)}(x) - P_n^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (P_{m_{j+1}}^{(q)}(x) - P_{m_j}^{(q)}(x)) \tag{46}$$

absolut und gleichmäßig konvergent.

Aus (40) folgt für  $-1 \leq x \leq 1$

$$|P_{m_{j+1}}(x) - P_{m_j}(x)| \leq 2M(m_j)^{-k-\alpha}$$

und daraus nach [10, 4.8.81]

$$|P_{m_{j+1}}^{(q)}(0) - P_{m_j}^{(q)}(0)| \leq M2^{q+1}(m_j)^{q-k-\alpha}, \quad q = 0, \dots, k. \tag{47}$$

Für  $q = 0, \dots, k$  folgt aus (46) und (47)

$$|a_{qn} - F^{(q)}(0)/q!| \leq M2^{q+1}n^{q-k-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{q-k-\alpha})^j / q!,$$

womit (41) bewiesen ist.

Es sei nun  $q \geq k + 1$ . Wir bezeichnen  $n_j = n_0 2^j$  und bestimmen  $r \in N_0$  durch  $n_{r+1} \geq n > n_r$ . Dann ist

$$|P_n(x)| \leq |P_n(x) - P_{n_r}(x)| + \sum_{j=1}^r |P_{n_j}(x) - P_{n_{j-1}}(x)| + |P_{n_0}(x)|.$$

Wegen

$$\|P_{n_0}\|_{\infty; -1,1} \leq Mn_0^{-k-\alpha} + \|f\|_{\infty; -1,1} = K$$

folgt hieraus nach (47)

$$|P_n^{(q)}(0)| \leq 2^{1+k+\alpha} Mn^{q-k-\alpha} \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{r-1} (2^{-q+k+\alpha})^j \right\} + Kn_0^q.$$

Hieraus schließen wir unmittelbar auf die Abschätzungen (42)–(44); bei (42) müssen wir berücksichtigen, daß  $r < (\log n)/\log 2$  gilt.

LEMMA 5. *Es sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ . Sei  $F \in L_p(-1, 1)$ . Für  $\gamma > 1/p$  sei sogar  $F \in C[-1, 1]$ . Für jedes  $n \geq n_0$  möge ein Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} x^i$$

existieren, so daß

$$\|F - P_n\|_{p; -1,1} \leq Mn^{-\gamma} \quad (48)$$

erfüllt ist;  $M$  sei positive Konstante. Dann existiert eine positive Zahl  $\bar{M}$ , unabhängig von  $n$  und  $q$ , so daß folgende Ungleichungen gelten:

Sei  $0 < \gamma < 1/p$ . Dann ist für  $q = 0, 1, \dots, n-1$

$$|a_{qn}| \leq \bar{M} 2^q n^{q+1/p-\gamma}/q!. \quad (49)$$

Sei  $\gamma = 1/p$ . Dann ist für  $q = 0, 1, \dots, n-1$

$$|a_{qn}| \leq \bar{M} 2^q n^q (\log n)/q!. \quad (50)$$

Sei  $\gamma > 1/p$ ; sei  $k \in N_0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , definiert durch

$$k + \beta = \gamma - 1/p. \quad (51)$$

Für  $q = 0, \dots, k$  existiert dann  $F^{(q)}(0)$  und es gilt

$$\bar{a}_{qn} = |a_{qn} - F^{(q)}(0)/q!| \leq \bar{M} 2^q n^{q+1/p-\gamma}/q!; \quad (52)$$

für  $0 < \beta < 1$

$$\bar{a}_{k+1,n} = |a_{k+1,n}| \leq \bar{M} 2^{k+1} n^{k+1+1/p-\gamma}/(k+1)!; \quad (53)$$

für  $\beta = 1$

$$\bar{a}_{k+1,n} = |a_{k+1,n}| \leq \bar{M}2^{k+1}(\log n)/(k+1)!; \quad (54)$$

für  $0 < \beta \leq 1$  und  $q = k+2, \dots, n-1$

$$\bar{a}_{qn} = |a_{qn}| \leq \bar{M}2^q n^{q+1/p-\gamma}/q!. \quad (55)$$

*Beweis.* Es sei

$$G(t) = \sin t F(\cos t), \quad T_n(t) = \sin t P_n(\cos t);$$

und somit

$$\|G - T_n\|_{p; -\pi, \pi} \leq 2^{1/p} M n^{-\gamma}. \quad (56)$$

$T_n$  ist ein trigonometrisches Polynom von höchstens  $n$ -tem Grad. Sei nun  $0 < \gamma \leq 1/p$ . Dann sei  $n_j = n_0 2^j$  und  $r \in N_0$  so, daß

$$n_r \leq n < n_{r+1}. \quad (57)$$

Aus (56) folgt für alle  $m' > m \geq n_0$

$$\|T_{m'} - T_m\|_{p; -\pi, \pi} \leq 2^{1+1/p} M m^{-\gamma}. \quad (58)$$

Nach [10, 4.9.2] und (7) ist für jedes trigonometrische Polynom  $Q_m$  von höchstens  $m$ -ten Grades

$$\|Q_m\|_\infty \leq A_p m^{1/p} \|Q_m\|_{p; -\pi, \pi}, \quad (59)$$

wobei  $A_p$  nur von  $p$  abhängt;  $0 < A_p < \infty$ . Wegen

$$\|T_n\|_\infty \leq \|T_n - T_{n_r}\|_\infty + \sum_{i=0}^{r-1} \|T_{n_{i+1}} - T_{n_i}\|_\infty + \|T_{n_0}\|_\infty$$

folgt unter Verwendung von (57)–(59)

$$\|T_n\|_\infty \leq 8A_p M n^{1/p-\gamma} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^r (2^{\gamma-1/p})^j \right\} + \|T_{n_0}\|_\infty. \quad (60)$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T_n\|_\infty &\leq M_0 n^{1/p-\gamma}, & 0 < \gamma < 1/p, \\ \|T_n\|_\infty &\leq M_1(r+1) \leq M_2 \log n, & \gamma = 1/p. \end{aligned}$$

Für  $x \in (-1, 1)$  ist daher

$$|P_n(x)| \leq (1-x^2)^{-1/2} \|T_n\|_\infty,$$

und somit für alle  $x \in [-1, 1]$

$$|P_n(x/2)| \leq \bar{M}n^{1/p-\gamma} \quad \text{bzw.} \quad |P_n(x/2)| \leq \bar{M} \log n.$$

Auf  $P_n(x/2)$  wenden wir [10, 4.8.81] und (49) an und erhalten unmittelbar die Abschätzungen (49) und (50).

Sei nun  $\gamma > 1/p$ . Nach Voraussetzung ist  $F \in C[-1, 1]$  und daher  $G \in C_{2\pi}$ . Des weiteren ist  $\lim T_n(t) = G(t)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig für alle  $t \in R$ . Denn seien beliebige natürliche Zahlen  $m' > m \geq n_0$  vorgegeben und sei  $m_j = m2^j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Wir bestimmen  $r \in N_0$  durch

$$m_r \leq m' < m_{r+1}. \quad (61)$$

Dann ist

$$\|T_{m'} - T_m\|_\infty \leq \|T_{m'} - T_{m_r}\|_\infty + \sum_{j=0}^{r-1} \|T_{m_{j+1}} - T_{m_j}\|_\infty. \quad (62)$$

Aus (62) erhalten wir unter Verwendung von (58), (59) und (61)

$$\|T_{m'} - T_m\|_\infty \leq M_3 m^{-\gamma+1/p}, \quad (63)$$

wobei  $M_3 = 2^{2+2/p} A_p M / (1 - 2^{-\gamma+1/p})$  ist.

Aus (63) folgt einerseits die gleichmäßige Konvergenz von  $\lim T_n(t) = G(t)$  für  $n \rightarrow \infty$ , andererseits ist für  $m' \rightarrow \infty$ ,  $n = m$

$$\|G - T_n\|_\infty \leq M_3 n^{-\gamma+1/p}. \quad (64)$$

Dann ist aber für alle  $x \in [-1, 1]$

$$|F(x/2) - P_n(x/2)| \leq M_4 n^{-\gamma+1/p}. \quad (65)$$

Auf  $F(x/2)$  und  $P_n(x/2)$  wenden wir nun Lemma 4 an und erhalten dadurch sofort (52)–(55).

Für die späteren Anwendungen ist es recht vorteilhaft, wenn wir Satz 1 in folgende Gestalt überführen.

**SATZ 7.** *Es sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\gamma \in R$ ,  $\gamma > 0$ . Zu  $f \in L_p(0, 1)$  möge eine Funktion  $F \in L_p(-1, 1)$  existieren mit  $F(x) = f(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Für  $\gamma > 1/p$  sei sogar  $f \in C[0, 1]$  und  $F \in C[-1, 1]$ . Des weiteren möge es für jedes  $n \geq n_0$  ein Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{in} x^i$$

geben, so daß

$$\|F - P_n\|_{p; -1, 1} \leq Mn^{-\gamma} \quad (66)$$

erfüllt ist;  $M$  sei positive Konstante. Dann erfüllt  $E_s^{(p)}(f; p_i)$  eine der folgenden Ungleichungen (für jedes  $\epsilon > 0$ ): Im Falle  $0 < \gamma < 1/p$

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq C(\epsilon) n^{-\gamma} \left\{ 1 + \sum_{q=0}^n \frac{2^q}{q!} n^{q+1/p} \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p} \right\}; \quad (67)$$

im Falle  $\gamma = 1/p$

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq C(\epsilon) n^{-\gamma} \left\{ 1 + \sum_{q=0}^n \frac{2^q}{q!} n^{q+1/p} \log n \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p} \right\}. \quad (68)$$

Im Falle  $\gamma > 1/p$  seien  $k \in N_0$  und  $\beta \in R$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , durch (51) definiert. Für  $0 < \beta < 1$  ist dann

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq C(\epsilon) n^{-\gamma} \left\{ 1 + \sum_{q=0}^n \frac{2^q}{q!} n^{q+1/p} \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p} \right\} + K_p(\epsilon) \sum_{q=0, q \notin \{p_i\}}^k \frac{|f^{(q)}(+0)|}{q!} \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p}. \quad (69)$$

Für  $\beta = 1$  müssen wir (wegen (54)) in der ersten Summe für  $q = 1$  den Faktor  $n^{1+1/p}$  durch  $n^{1+1/p} \log n$  ersetzen.  $C(\epsilon)$  ist positiv und unabhängig von  $s$  und  $n$ . Für  $p = 2$  dürfen wir (wegen (8)) auch  $\epsilon = 0$  wählen. Außerdem ist  $K_2(\epsilon) = K_2(0) = 1$  und für  $p \neq 2, \epsilon > 0, K_p(\epsilon) = 2^{1/p}(p\epsilon)^{-1/p}$  zu setzen.

*Beweis.* Berücksichtigen wir, daß

$$\|f - P_n\|_{p;0,1} \leq \|F - P_n\|_{p;-1,1} \leq Mn^{-\gamma}$$

ist, so erhalten wir sämtliche Aussagen des Satzes 7, wenn wir in die Ungleichungen (3) und (5) des Satzes 1 die Ergebnisse der Lemmata 1 und 5 einsetzen.

*Bemerkung.* Wie in Satz 1 sind auch in Satz 7 die Zahlen  $n \geq n_0$  und  $s \in N$  frei und unabhängig von einander wählbar. Um aus (67), (68) oder (69) für eine vorgegebene Folge  $\{p_i\}$  eine gute Abschätzung für die beste Approximation  $E_s^{(p)}(f; p_i)$  zu bekommen, müssen wir zu jedem  $s \in N, s \geq s_0$ , eine Zahl  $n = n(s) \in N$  möglichst günstig bestimmen. Dasselbe Verfahren wendeten wir bereits im Falle  $p = \infty$  an. Ich habe die Voraussetzungen des Satzes 7 bewußt in der obigen Form gewählt. Wir bekommen dadurch einen direkten Einblick, der in den folgenden Beispielen noch präzisiert wird, wie die Approximationsgüte bezüglich algebraischer Polynome

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^s c_i x^{p_i}$$

zusammenhängt. Es ist aber nicht schwer, mit Hilfe bekannter Sätze vom Jackson-Typ in der  $L_p$ -Norm zu vorgegebener Funktion  $f$  Funktionen  $F$  und Polynome  $P_n$  zu finden, die die Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllen. In Beispiel 6.1 werde ich dies vorführen.

Zum Abschluß diskutieren wir einige Beispiele, ohne aber eine ähnliche Vollständigkeit anzustreben wie zuvor im Falle der Supremumsnorm. Natürlich kann man für jede Exponentenfolge  $\{p_i\}$ ,  $p_i > -1/p$ ,  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ , die Abschätzungen des Satzes 7 verwenden, um obere Schranken der besten Approximation  $E_s^{(p)}(f; p_i)$  zu gewinnen.

6. BEISPIEL. Wie im 2. Beispiel sei

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_i < p_{i+1} < \dots;$$

und es möge ein  $\lambda \in R$ ,  $\lambda > 0$ , existieren, so daß für  $i \geq i_0$  stets  $p_i \geq i\lambda$  erfüllt ist. (Der Einfachheit halber sei hier  $i_0 = 1$ .) Für  $q \in N_0$  sei  $p_{r+1}$  das kleinste Folgeelement größer als  $q$ . Für jedes  $\delta \in R$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ , und jedes  $i \geq r + 1$  ist dann

$$\frac{p_i - q}{q + p_i + 2\delta} \leq \exp(-2(q + \delta)/(p_i + \delta)). \quad (70)$$

Sei wieder für jedes  $s \in N$  die Funktion  $\varphi(s)$  definiert durch

$$\varphi(s) = \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/p_i\right).$$

Setzen wir noch  $\varphi(0) = 1$ , so ist für alle  $q \in N_0$ ,  $r = r(q) \in N_0$ ,

$$\prod_{i=1}^s \frac{|p_i - q|}{q + p_i + 2\delta} \leq \varphi(r)^{2(q+\delta)} (\bar{K}\varphi(s))^{-2(q+\delta)}, \quad (71)$$

$\bar{K} = \exp(-\sum_{i=1}^{\infty} 1/(p_i)^2)$ . Aus (17) und (71) folgt die Existenz einer positiven Zahl  $K$ , unabhängig von  $s$  und  $q$ , so daß für alle  $q \in N$

$$\prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p} \leq (Kq^{1/\lambda}\varphi(s)^{-1})^{2q - \epsilon + 2/p}, \quad (72)$$

sowie für  $q = 0$

$$\prod_{i=1}^s \frac{p_i}{p_i - \epsilon + 2/p} \leq (K\varphi(s)^{-1})^{-\epsilon + 2/p} \quad (73)$$



gilt. In die Ungleichungen (67)–(69) setzen wir nun (72) und (73) ein und wählen zu jedem  $s \geq s_0$

$$n = n(s) = [\varphi(s)^d c], \quad c = (4eK^2)^{-d/2},$$

wobei  $d = 2$ , falls  $\lambda \geq 2$ , und  $d = \lambda$ , falls  $0 < \lambda < 2$ .  $s_0$  ist bestimmt durch  $n(s_0) \geq n_0$ . Auf diese Weise erhalten wir

SATZ 8. *Es seien sämtliche Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt, insbesondere (66). Es sei  $d = \min\{\lambda, 2\}$ . Zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert dann eine positive Zahl  $\bar{C}(\epsilon)$ , unabhängig von  $s$ , so daß  $E_s^{(p)}(f; p_i)$  den folgenden Ungleichungen genügt: Im Falle  $0 < \gamma < 1/p$*

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \bar{C}(\epsilon) \varphi(s)^{-\gamma d + \epsilon}; \tag{74}$$

im Falle  $\gamma = 1/p$

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \bar{C}(\epsilon) \log \varphi(s) \varphi(s)^{-\gamma d + \epsilon}; \tag{75}$$

im Falle  $\gamma > 1/p$  und  $0 < \beta < 1$

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \bar{C}(\epsilon) \varphi(s)^{-\gamma d + \epsilon} + K_p(\epsilon) \cdot \sum_{q=0, q \notin \{p_i\}}^k c_q |f^{(q)}(0)| \varphi(s)^{-2q + \epsilon - 2/p}; \tag{76}$$

im Falle  $\gamma > 1/p$  und  $\beta = 1$  ist auf der rechten Seite von (76) der Ausdruck  $\varphi(s)^{-\gamma d + \epsilon}$  durch  $\log \varphi(s) \varphi(s)^{-\gamma d + \epsilon}$  zu ersetzen. Die Größen  $c_q$  sind positiv und unabhängig von  $s$ . Für  $p = 2$  dürfen wir  $\epsilon = 0$  setzen.

6.1. BEISPIEL. Es sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\gamma \in R, 0 < \gamma \leq 1$ . Es sei  $f \in L_p(0, 1)$  und  $F \in L_p(-1, 1)$ , wobei  $F(x) = f(x)$  für  $0 \leq x \leq 1$  und  $F(x) = f(-x)$  oder  $F(x) = -f(-x)$  für  $-1 \leq x < 0$ . Es sei außerdem

$$\omega_p(F; h) = \inf_{|t| \leq h} \left( \int_{-1}^1 |F(x+t) - F(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq Ah^\gamma, \quad h \geq 0, \quad A > 0. \tag{77}$$

Dann ist nach bekannten Ergebnissen

$$E_n(F)_{L_p} = \inf_{a_i} \left( \int_{-1}^1 \left| F(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i \right|^p dx \right)^{1/p} \leq CAn^{-\gamma}. \tag{78}$$

Für  $\gamma > 1/p$  sei zusätzlich  $F \in C[-1, 1]$  und  $F(0) = f(0) = 0$ .

6.1.1. Wir betrachten die Exponentenfolge  $p_i = i\lambda, i = 1, 2, \dots$  und  $\lambda > 0$ . Dann ist  $\varphi(s) \geq s^{1/\lambda}$  und nach Satz 8, (74)–(76), für  $\bar{d} = \min\{1, 2/\lambda\}$

$$E_s^{(p)}(f; i\lambda) \leq \bar{C}(\epsilon) s^{-\gamma \bar{d} + \epsilon}, \quad \gamma \neq 1/p, \tag{79}$$

$$E_s^{(p)}(f; i\lambda) \leq \bar{C}(\epsilon) \log s s^{-\gamma \bar{d} + \epsilon}, \quad \gamma = 1/p. \tag{80}$$

Für  $p = 2$  können wir in (79) und (80)  $\epsilon = 0$  setzen.

6.1.2. Sei  $p_i = (i + 1) \log(i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (Siehe 2.1. Beispiel!) Für  $i \geq 5$  ist dann  $p_i \geq 2i$  und damit  $\lambda \geq 2$ . Außerdem ist

$$\varphi(s) \geq \log s, \quad s \in N.$$

Nach Satz 8 ist somit

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \bar{C}(\epsilon)(\log s)^{-2\gamma+\epsilon}, \quad s \geq 2, \quad \gamma \neq 1/p. \quad (81)$$

Für  $\gamma = 1/p$  ist die rechte Seite von (81) mit  $\log \log s$  zu multiplizieren. Für  $p = 2$  dürfen wir wieder  $\epsilon = 0$  setzen.

7. BEISPIEL. Wie im 4. Beispiel gelte nun

$$0 < p_1 < p_2 < \dots, \quad \text{sowie} \\ \lim p_i = p^* < \infty \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Für hinreichend kleines  $\epsilon \geq 0$  existiert dann eine reelle Zahl  $\bar{c}$ ,  $0 < \bar{c} < 1$ , unabhängig von  $q$  und  $i$ , so daß für alle  $i \in N$  und  $q \in N$ ,  $q \notin \{p_i\}$  gilt

$$|q - p_i|/(q + p_i - \epsilon + 2/p) \leq (q - \bar{c})/(q + \bar{c}) \leq e^{-2\bar{c}/q}. \quad (82)$$

Für  $q = 0$  ist für  $\epsilon \leq 1/p$

$$p_i/(p_i - \epsilon + 2/p) \leq p^*/(p^* + 1/p) = e^{-2\bar{c}}, \quad \bar{c} > 0. \quad (83)$$

Für  $c = \min\{\bar{c}, \bar{c}\}$ ,  $0 < c < 1$ , folgt aus (82) und (83) für jedes  $q \in N_0$ ,  $q \notin \{p_i\}$ , und jedes  $s \in N$ ,  $0 \leq \epsilon \leq 1/p$

$$\prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i - \epsilon + 2/p} \leq e^{-2cs/(q+1)}. \quad (84)$$

Wir setzen nun für  $\epsilon = 1/p$  die Ungleichung (84) in die Formeln (67)–(69) des Satzes 7 ein und wählen zu vorgegebenem  $s$  ein  $n = n(s) = \lfloor (cs/2)^{1/2} \rfloor$ . Dann sind die Summen in den geschweiften Klammer in (67)–(69), auch für  $\beta = 1$ , gleichmäßig beschränkt bezüglich  $s$  und  $n(s)$ , und wir erhalten das folgende Ergebnis.

SATZ 9. Es seien sämtliche Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt, insbesondere auch (66). Dann existieren positive Zahlen  $\tilde{C}$  und  $K_p(1/p) = 2^{1/p}$ , unabhängig von  $s$ , so daß

$$E_s^{(p)}(f; p_i) \leq \tilde{C}s^{-\gamma/2} + 2^{1/p} \sum_{q=0, q \notin \{p_i\}}^k \frac{|f^{(q)}(+0)|}{q!} e^{-2cs/(q+1)}. \quad (85)$$

Für  $0 < \gamma \leq 1/p$  entfällt die zweite Summe der rechten Seite von (85).

8. BEISPIEL. Es sei  $p = 2$ . Für die Exponentenfolge  $\{p_i\}$  sei für alle  $i \in N$  stets  $p_i > -1/2$  und  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ , sowie

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = -1/2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (p_i + 1/2) = \infty. \tag{86}$$

Es sei

$$\Psi(s) = \sum_{i=1}^s (p_i + 1/2). \tag{87}$$

Der Einfachheit halber sei  $p_i < 0$  für alle  $i \in N$ . Dann ist für jedes  $q \in N_0$

$$\prod_{i=1}^s \frac{q - p_i}{q + p_i + 1} \leq e^{-2\Psi(s)/(q+1/2)}. \tag{88}$$

In die Ungleichungen (67)–(69) setzen wir nun für  $\epsilon = 0$  und  $K_2(0) = 1$  die Abschätzung (88) ein und wählen zu jedem  $s \geq s_0$  die natürliche Zahl

$$n = n(s) = [(\Psi(s)/2)^{1/2}]; \quad n(s_0) \geq n_0.$$

Somit erhalten wir

SATZ 10. *Es seien sämtliche Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt, insbesondere auch (66). Dann existiert eine positive Zahl  $\tilde{C}$ , unabhängig von  $s$ , so daß für  $s \geq s_0$*

$$E_s^{(2)}(f; p_i) \leq \tilde{C}\Psi(s)^{-\gamma/2} + \sum_{q=0, q \notin \{p_i\}}^k \frac{|f^{(q)}(+0)|}{q!} e^{-2\Psi(s)/(q+1/2)}. \tag{89}$$

Für  $0 < \gamma \leq 1/2$  entfällt die zweite Summe der rechten Seite.

8.1. BEISPIEL. Sei  $p_i = -1/2 + 1/i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Dann ist  $\Psi(s) \geq \log s$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 10 folgt hieraus für  $s \geq s_0$

$$E_s^{(2)}(f; p_i) \leq \tilde{C}(\log s)^{-\gamma/2} + \sum_{q=0, q \notin \{p_i\}}^k \frac{|f^{(q)}(+0)|}{q!} s^{-2/(q+1/2)}, \tag{90}$$

wobei die zweite Summe für  $0 < \gamma \leq 1/2$  wegfällt.

*Schlußbemerkung.* Das Beispiel 1 dieser Arbeit wurde in [4] auch auf den Fall übertragen, daß wir nicht in  $[0, 1]$ , sondern in einem Intervall  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , approximieren. Dies können wir natürlich auch für alle anderen Beispiele durchführen.

## LITERATURVERZEICHNIS

1. N. I. ACHESER, "Vorlesungen über Approximationstheorie," Akademie Verlag, Berlin, 1953.
2. M. v. GOLITSCHKEK, Generalization of the Jackson approximation theorems in the sense of Ch. Müntz, *Bull. Amer. Math. Soc.* **15** (1969), 524–528.
3. M. v. GOLITSCHKEK, Jackson-Sätze für Polynome  $\sum_{i=0}^s a_i x^{p_i}$ , in "Abstract Spaces and Approximation," Proceedings of the Conference at Oberwolfach, 1968, Birkhäuser, Basel, 1969.
4. M. v. GOLITSCHKEK, Erweiterung der Approximationssätze von Jackson im Sinne von Ch. Müntz II, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 72–86.
5. D. JACKSON, "The Theory of Approximation," Vol. XI, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, New York, 1930.
6. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart & Winston, New York, 1966.
7. R. E. A. C. PALEY AND N. WIENER, "Fourier Transforms in the Complex Domain," Vol. XIX, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, New York, 1934.
8. D. J. NEWMAN, A Müntz-Jackson theorem, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 940–944.
9. D. J. NEWMAN, E. PASSOW, AND L. RAYMON, Approximation by Müntz polynomials on sequences, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 476–483.
10. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Pergamon Press, Oxford, 1963.

*Nachtrag.* Ich möchte nicht versäumen, weitere Arbeiten über Jackson-Müntz Sätze anzugeben, die vor kurzem erschienen sind oder in kürze erscheinen werden.

11. W. FORST, "Über die Approximationsprobleme von Müntz und Jackson," Dissertation, Konstanz 1970.
12. T. GANELIUS AND S. WESTLUND, The degree of approximation in Müntz's theorem, Proceedings of the International Conference in Jyväskylä, Finland, 1970.
13. D. LEVIATAN, On the Jackson-Müntz theorem, erscheint im *J. Approximation Theory*.
14. S. WESTLUND, Some further results on the degree of approximation in Müntz's theorem, Universität Göteborg, Schweden, No. 1970-14.